- El programa **latex2html** accepta que el document de partida tengui la bibliografia preparada pel programa BiBTeX. O sigui, és correcte que hi surtin instruccions com ara:

```
...
\bibliographystyle{alpha}
\bibliography{biblio}
...
```

on en el fitxer `biblio.bib` hi ha tota la bibliografia en format `bib` per pasar-la a `bbl` mitjançant el programa BiBTeX. En aquest cas, el programa **latex2html** crearà correctament la bibliografia generant un **link** per cada `\cite` trobat.

Ara bé, existeix un paquet anomenat `chapterbib.sty` per posar múltiples bibliografies en un mateix document. Si el feu servir, el programa **latex2html** no funcionarà: deixarà en blanc totes les bibliografies i posarà `[]` en els `\cite`'s. Per solucionar aquesta dificultat, podeu executar el programa **latex2html** essent conscients del problema, i crear les bibliografies a part i posar-les en els nodes corresponents. L'últim pas seria posar els **link**'s a mà en els `\cite`'s corresponents.

Problemes

XXXII Olimpíada

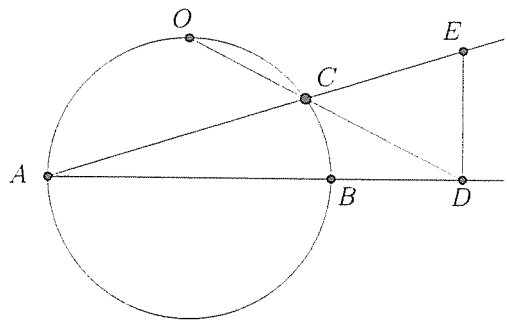
Fase catalana (15 i 16 de desembre de 1995)

1. Un professor de matemàtiques va escriure a la pissarra un polinomi $f(x)$ amb coeficients enters i va dir: «Si, al polinomi, en lloc de x hi escrivim l'edat del meu fill que acaba de fer a anys, obtenim la igualtat $f(a) = a$. A més, $f(0) = p$ és un nombre primer més gran que a». Quants anys tenia el fill del professor?

2. Sigui n un nombre natural. Trobeu el nombre més gran k tal que en el conjunt $\{1, 2, ..., n\}$ puguem agafar un subconjunt A de k nombres que compleixi que, si x, y, z són nombres qualssevol de A, sempre sigui $x + y \neq z$.

3. Escollim un nombre natural n i demanem a r persones que escriguin un subconjunt de $\{1, 2, ..., n\}$. Quina és la probabilitat que els r subconjunts obtinguts siguin disjunts dos a dos?

4. Sigui AB el diàmetre d'una circumferència, O el punt mitjà d'un dels arcs que van des de A a B, i C un punt qualsevol de l'arc OB. Dibuixem les rectes AC, OC i sigui D la intersecció de OC amb AB. Sigui DE la perpendicular a AD que talla AC en E. Demostreu que els segments BD i DE tenen la mateixa longitud.



5. Calculeu un nombre de sis xifres sabent que passant-ne l'última al davant queda dividit per 3.

6. Calculeu el màxim comú divisor de

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \ldots, \binom{n+k}{k}$$

on n i k, $n \geq k$, són nombres naturals.

7. Demostreu que si un polígon inscrit en una circumferència de radi r té costats de de longituds $l_1, l_2, \ldots, l_n$ es compleix

$$l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2 \leq 9r^2.$$

Determineu per quins polígons hi ha igualtat.

8. Donat un nombre natural n, sigui $p(n)$ el producte de les seves xifres. Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$$

Fase espanyola (Tarragona, 22 i 23 de febrer de 1996)

1. Els nombres naturals a i b són tals que

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

és enter. Demostreu que el màxim comú divisor de a i b no és més gran que $\sqrt{a+b}$.

2. Anomenem G el baricentre d'un triangle ABC. Demostreu que si $AB+GC = AC+GB$, llavors ABC és un triangle isòsceles.

3. Siguin a, b i c tres nombres reals. Es consideren les funcions

$$f(x) = ax^2+bx+c \quad \text{i} \quad g(x) = cx^2+bx+a.$$

Sabent que

$$|f(-1)| \leq 1, \quad |f(0)| \leq 1 \quad \text{i} \quad |f(1)| \leq 1,$$

demostreu que, si $-1 \leq x \leq 1$, llavors

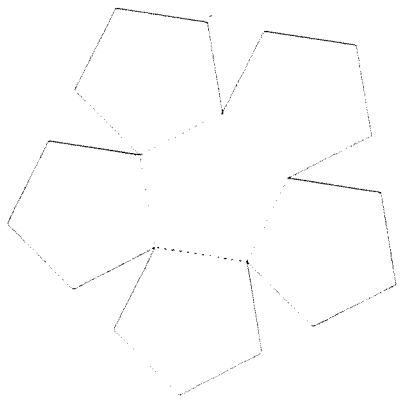
$$|f(z)| \leq \tfrac{5}{4} \quad \text{i} \quad |g(x)| \leq 2.$$

4. Discutiu l'existència de solucions reals x de l'equació

$$\sqrt{x^2-p} + 2\sqrt{x^2-1} = x$$

segons els valors reals del paràmetre p i resoleu-la en els casos en què tingui solució.

5. A *Port Aventura* hi ha 16 agents secrets. Cadascun d'ells vigila alguns dels seus col·legues. Se sap que si l'agent A vigila l'agent B, llavors B no vigila A. A més, 10 agents qualssevol poden ser numerats de manera que el primer vigila el segon, aquest vigila el tercer, ..., el desè vigila el primer. Demostreu que també es poden numerar d'aquesta manera 11 agents qualssevol.



6. La figura anterior està formada per sis pentàgons regulars de costat 1 metre. Es doblega per les línies de punts fins que coincideixen les arestes no puntejades que conflueixen en cada vèrtex. Quin volum d'aigua cap en el recipient que resulta amb aquest procediment?

Problemes proposats

- Fins al dia 20 novembre teniu temps, encara, de fer-nos arribar respostes als enunciats plantejats a **SCM/Notícies/3**, que es publicaran al número 5 de la nostra revista. Us recordem seguidament aquests enunciats i ho aprofitem per corregir el de l'**A15**.

A13. Determineu tots els enters $x, y \neq 0$ tals que

$$(x^2+y)(x+y^2) = (x-y)^3.$$

A14. Els segments AD, BE, CF són les bisectrius interiors d'un triangle ABC amb D, E i F sobre els costats del triangle. Determineu els possibles valors de l'angle $\angle BAC$ si l'angle $\angle EDF$ és de $90°$.

A15. (Nou enunciat) Sigui f una funció de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$ tal que $f(1) = 1, f(2n) = f(n), f(3) = 3,$ $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n), \quad f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n).$
Determineu la quantitat de nombres naturals entre 1 i 2000 fixos per aquesta funció.

- Tot seguit tres enunciats nous. Esperem les vostres solucions a aquests problemes (preferiblement per *email* o també en suport magnètic) que seran publicades al número 6 de **SCM/Notícies**.

A16. Donada l'equació

$$az\bar{z} + bz + c = 0$$

on $a, b, c \in \mathbb{C}$ són constants, i $a \neq 0$, discutiu segons els valors dels paràmetres i trobeu totes les solucions $z \in \mathbb{C}$. (Proposat per Antonio Montes, UPC).

A17. Considereu un pentàgon regular. Si es tracen les seves diagonals es forma al seu interior un nou pentàgon regular. Trobeu la raó entre les àrees dels dos pentàgons.

A18. Calculeu la suma:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!$$

A19. La funció zeta de Riemann, $\zeta(k)$, es defineix com la suma de la sèrie:

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^k}.$$

Demostreu que $\sum_{k=2}^{\infty}(\zeta(k) - 1) = 1$.

Solucions

- Tot seguit trobareu les solucions dels problemes corresponents a **SCM/Notícies**/2, entre els quals hi podreu observar el que fins ara ha tingut més èxit: l'**A11**. N'hem rebut 4 respostes correctes i hem seleccionat, i no precisament per raons sentimentals, la que ens ha fet arribar un «olímpic» del curs 1994/95.

A9. Tenim en el pla un triangle $A_1A_2A_3$ i un punt P_0. Definim $A_s = A_{s-3}$ per a tot $s \geq 4$. Construïm una successió de punts $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ de manera que P_k és, per a $k = 1, 2, \ldots$, la imatge de P_{k-1} en un gir antihorari de centre A_k i amplitud 120° Demostreu que si $P_{1986} = P_0$, llavors el triangle $A_1A_2A_3$ és equilàter.

Solució (Quico Prats, UPC, i Anna Pol han enviat solucions en la línia de raonament que exposem tot seguit). Atès que $G_{A_k,120°}(P_{k-1}) = P_k$, per a tot $k = 1, 2, \ldots$, es tindrà

$$P_{1986} = (G_{A_{1986},120°} \circ \ldots \circ G_{A_1,120°})(P_0) = P_0,$$

la qual cosa, reduint mòdul 3 els subíndexos dels A_k, implica

$$(G_{A_3,120°} \circ G_{A_2,120°} \circ G_{A_1,120°})^{662}(P_0) = P_0.$$

Ara bé, el producte de tres girs d'angle 120° és una translació o bé la identitat, per tant la darrera condició força a

$$G_{A_3,120°} \circ G_{A_2,120°} \circ G_{A_1,120°} = I,$$

que és equivalent a

$$G_{A_2,120°} \circ G_{A_1,120°} = (G_{A_3,120°})^{-1} = G_{A_3,240°}.$$

Per altra banda, siguin l la recta per A_1 tal que l'angle que formen l i la recta A_1A_2 (en el sentit de la primera a la segona) és de 60° antihorari i r la recta per A_2 tal que l'angle que formen la recta A_1A_2 i R (en el sentit de la primera a la segona) és de 60° antihorari.

Si denotem per S_i la simetria axial d'eix la recta i, tindrem:

$$\begin{aligned} G_{A_2,120°} \circ G_{A_1,120°} &= S_r \circ S_{A_1A_2} \circ S_{A_1A_2} \circ S_l \\ &= S_r \circ S_l = G_{A_3,240°}, \end{aligned}$$

i, com a conseqüència, A_3 ha de ser la intersecció de les rectes l i r, i així, per construcció, el triangle $A_1A_2A_3$ serà equilàter.
Notem que es pot deduir, a més, que el sentit $A_1A_2A_3$ dels vèrtexs del triangle donat ha de ser horari (contrari al dels gris G_i), i, si s'afegeix aquest fet, val el recíproc de l'enunciat.
Altres idees: Antoni Gomà ha raonat essencialment de la mateixa manera però fent servir nombres complexos per representar els punts del pla i operacions entre ells per expressar les translacions i girs.

* *

10. Sigui $p_n(k)$ el nombre de permutacions del conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$ que tenen exactament k elements fixos. Demostreu que

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) = n!$$

Solució (Francesc Borrell, IB Salvador Espriu, Salt). Observem que, si $k = 1, \ldots, n-2$, llavors

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p_{n-k}(0)$$

i, per altra banda,

$$p_n(n-1) = 0 \quad \text{i} \quad p_n(n) = 1.$$

A partir d'ací, calculem:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) &= \sum_{k=1}^{n-2} k\, p_n(k) + n \\
&= \sum_{k=1}^{n-2} k \binom{n}{k} p_{n-k}(0) + n \\
&= \sum_{k=1}^{n-2} n \binom{n-1}{k-1} p_{n-k}(0) + n \\
&= n \sum_{k=1}^{n-2} p_{n-1}(k-1) + n \\
&= n(\sum_{k=1}^{n-2} p_{n-1}(k-1) + 1) \\
&= n((n-1)!) = n!.
\end{aligned}$$

* *

11. En un triangle acutangle ABC la bisectriu interior de l'angle A talla el costat BC al punt K i el cercle circumscrit al punt M. Des del punt K es tracen perpendiculars KL i KN a AB i AC, respectivament, on posem L i N per designar els peus de les esmentades perpendiculars. Demostreu que el quadrilàter $ALMN$ i el triangle ABC tenen la mateixa àrea.

Solució (Joaquim Puig Sadurní, estudiant). Es pot suposar, sense perdre generalitat, que el costat AC és més llarg o igual que el costat AB.

Sigui B' el punt del segment AC en què les longituds AB i AB' són iguals. Anomenarem P el punt mitjà del segment $B'C$.

Tracem rectes des de M cap a B', P i C.

Com que els punts A, B, M i C estan sobre una circumferència, els angles i $\angle MCA$ són suplementaris. Però l'angle $\angle MBA$ és igual que l'angle $\angle MB'A$, per simetria i el fet que AM és la bisectriu de l'angle $\angle BAC$. Per tant, els angles $\angle MB'P$ i $\angle MCA$ són iguals.

Això ens diu que el triangle $MB'C$ és isòsceles i, per tant, que el segment MP és perpendicular al segment AC i, per tant, paral·lel a KN.[2]

L'àrea del triangle ABC és

$$\frac{1}{2} \cdot LK \cdot AB + \frac{1}{2} \cdot KN \cdot AC$$

que, atenent al fet que K és un punt de la bisectriu i, per tant, $LK = KN$, es pot simplificar i emprant també la manera en què s'ha construït P, queda,

$$KN \cdot \frac{1}{2} \cdot (AB + AC) = KN \cdot AP.$$

Com que els triangles AKN i AMP són semblants,

$$KN \cdot AP = MP \cdot AN.$$

Però $MP \cdot AN$ és el doble de l'àrea del triangle ANM i, per tant, per la simetria ja comentada, igual a l'àrea del quadrilàter $ALMN$, com volíem demostrar.

Altres solucions: Miguel Amengual (Cala Figuera, Mallorca) parteix de la semblança dels triangles ABM i AKC, escriu l'àrea del triangle ABC com $\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A$ i, a partir de l'expressió del $\sin A$ en funció de les raons trigonomètriques de l'angle $\frac{A}{2}$ arriba a veure que l'àrea del triangle ABC és el doble que la de AMN, igual a la del quadrilàter $ALMN$. Anna Pol i Antoni Gomà han trobat altres solucions basades en la trigonometria.

* *

A12. Sigui $n \geq 3$ un nombre natural. Demostreu que existeix un conjunt de n punts al pla tal que la distància entre cada parell de punts del conjunt és irracional, i que cada terna de punts del conjunt determina un triangle no degenerat d'àrea racional.

Solució (Francesc Borrell, IB Salvador Espriu, Salt). Podem considerar els punts del pla com a punts de l'espai fent ús de l'aplicació $(x, y) \to (x, y, 0)$.

Això ens permet calcular l'àrea d'un triangle definit pels vectors (u_1, u_2) i (v_1, v_2) com la meitat del mòdul del producte vectorial dels vectors $(u_1, u_2, 0)$ i $(v_1, v_2, 0)$.

Així s'obté el resultat $A = \frac{1}{2}(u_1 v_2 - u_2 v_1)$ i, per tant, si un triangle té els seus vèrtexs de coordenades racionals, el valor de l'àrea és també racional.

Així doncs, cal veure només que per $n \geq 3$ existeix una col·lecció de n punts de coordenades racionals tals que la distància entre cada parell d'ells és irracional.

Un exemple de punts que compleixen això són els punts de la forma $P_k = (k, k^2), k = 1, 2, \ldots, n$.

Es pot assegurar que no hi ha, entre ells, cap terna de punts alineats perquè tots ells estan sobre la paràbola $y = x^2$.

Per altra banda la distància entre els punts P_i i P_j, si $j > i$, és

$$d = \sqrt{(j-i)^2 + (j^2 - i^2)^2} = (j-i)\sqrt{1 + (j-i)^2}$$

que és irracional perquè un quadrat perfecte diferent de 0 més una unitat no és mai un quadrat perfecte.

[2] Si fos $B' = C$, el raonament no perdria validesa, ja que llavors $\angle MCA$ i $\angle MBA$ seran iguals i suplementaris i, doncs, angles rectes.